GiovedìScienza

31ª Edizione

LA SCIENZA IN DIRETTA SETTIMANA PER SETTIMANA

GIOVEDÌ 24 NOVEMBRE 2016

IL FASCINO DEI NUMERI. STORIE E SEGRETI

Che cos'è davvero un numero

In collaborazione con Associazione Subalpina Mathesis e Goethe Institut Turin

Albrecht Beutelspacher

Ha studiato matematica, fisica e filosofia presso l'Università di Tubinga in Germania e ha conseguito il PhD all'Università di Magonza. Ha lavorato nei laboratori Siemens a Monaco di Baviera (1985-88). Dal 1988 è professore all'Università di Giessen.
Ha scritto molti libri di divulgazione, alcuni dei quali sono best seller, e nel 2002 ha inaugurato il Mathematikum a Giessen, uno dei primi science center della matematica. Per il suo impegno in questo campo, Beutelspacher, ha ricevuto molti premi.

Prima della conferenza sarà conferito il *Premio Peano 201*5 a Albrecht Beutelspacher per il libro *Il fascino dei numeri. Storie e segreti* (Carocci editore, 2015) e il P*remio Peano Junior 2014* a Giovanni Filocamo.

PER SAPERNE DI PIÙ

Albrecht Beutelspacher, *Il fascino dei numeri. Storie e segreti*, Carocci editore, 2015

Gabriele Lolli, *Numeri. La creazione continua della matematica*, Bollati Boringhieri

Eduardo Sáenz de Cabezon, *Intelligenza matematica. Scopri il matematico che è in te*, Edizioni Centauria

WEB

www.mathematikum.de
Il sito web dello science centre della matematica, fondato e diretto da Albrecht Beutelspacher

www.mathesistorino.it
Il sito dell'Associazione Subalpina Mathesis con la sezione istituzionale dedicata al premio Peano e le sezioni per ragazzi "Festa della Matematica", "Matematica che Passione! Stage di matematica interscuole"

Che cos'è davvero un numero? Non c'è forse nulla di più imbarazzante per un matematico di questa semplice domanda. Si crede che, se c'è qualcosa che i matematici devono sapere, questo qualcosa sia proprio "cos'è un numero". E difatti se ne occupano per tutto il tempo! E invece questa domanda mette in lieve imbarazzo qualsiasi matematica, o matematico, che borbotta qualcosa di simile a "non è così facile come si pensa" e infine preferisce evitare di rispondere. Dopo un po' deve però ammettere di non avere proprio una risposta adeguata. Scandaloso: la domanda più elementare della matematica rimane senza risposta! Il che dipende dal fatto che questa domanda non ha una risposta, e in ogni caso nessuna risposta semplice. E nemmeno una sola. Tentiamo di chiarire che cos'è un numero, ma anche di rispondere al perché non esiste una risposta semplice alla domanda "che cos'è un numero?"
Ovviamente la storia della matematica è costellata d'innumerevoli tentativi di stabilire che cos'è un numero.

I matematici dell'antica Grecia affermavano che i numeri erano i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5 ecc. In ogni caso sapevano già che i numeri non avevano una fine. Presto ci si accorse anche della necessità dei numeri frazionari. Era necessario dividere gli oggetti in due o in tre parti; nacque quindi il bisogno di numeri come 1/2 o 2/3. Utilizzandole quotidianamente, i commercianti del Medioevo erano dell'opinione che anche le frazioni fossero numeri.
Ci volle più tempo affinché gli uomini ammettessero anche i numeri negativi, ovvero –1 e –5.
– Già i matematici greci erano inciampati in numeri come $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt[3]{2}$. Alcuni di questi numeri "esistono" in quanto è possibile realizzarli geometricamente come lunghezze di un segmento, ma "in quanto numeri" le radici erano difficili da capire.
– Comparvero poi oggetti misteriosi come il π o il numero di Eulero "e". Era come trovare sulla Terra delle meteore raffreddate: era possibile studiarli e tentarne una comprensione, ma si percepiva che questi numeri portavano notizie provenienti da mondi lontani e rappresentavano quella enorme quantità di numeri reali a quel tempo ancor più misteriosi.
– Con l'"unità immaginaria" "i", definita a partire dalla $\sqrt{-1}$, per molti matematici finì il divertimento. C'è da farsi venire un capogiro. Quanti numeri! Quanti tipi diversi di numeri! Ci si strofinano gli occhi e ci si domanda meravigliati:
– Ma non finiscono mai?
– Servono davvero tutti questi numeri?
– La definizione di un numero è legata all'epoca in cui è stata formulata?
Accanto ad alcune risposte alla domanda iniziale, vogliamo mostrare anche:
– quanto i numeri arricchiscano la nostra esperienza;
– tutto quel che è possibile descrivere servendosi di essi;
– quali straordinarie applicazioni abbiano;
– quali suscitano un particolare fascino;
– quali segreti hanno ancora da svelare.

I numeri naturali

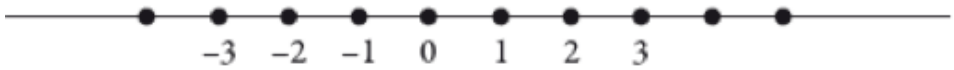
Numeri

Il senso del numero è connaturato all'essere umano. Tuttavia non è affatto una sua specificità, infatti anche gli animali ne hanno uno. Nel caso di molti animali superiori è possibile dimostrare la loro padronanza dei numeri: essi riescono a riconoscere quantità uguali e a distinguere quelle più grandi da quelle più piccole. Gli animali hanno un senso del numero, ma non sono in grado di contare. Questa attività è collegata al linguaggio articolato ed è perciò esclusiva dell'essere umano. Ma non gli è connaturata. Ogni essere umano deve imparare a contare. Il modo in cui un neonato comprende i numeri non è in sostanza diverso da quello di un pollo. Veniamo al mondo con la facoltà di stimare certe quantità in base alla grandezza. Tutto il resto dobbiamo faticosamente impararlo. Se non lo impariamo, restiamo fermi all'"uno, due, tanti". Si parla continuamente di popoli "primitivi" che hanno parole solo per i numeri uno e due. Possiamo cogliere a colpo d'occhio piccole quantità. Nel caso di cinque oggetti, o meno, riusciamo a stabilirne il numero senza contarli. Con quantità maggiori, questo è possibile solo se gli oggetti sono ordinati secondo uno schema. Al più tardi quando gli esseri umani divennero sedentari, diventò importante fissare in maniera esatta anche quantità maggiori. Esiste qualche scarno riferimento a rappresentazioni numeriche che risalgono a 20.000 o 30.000 anni fa: sono state trovate ossa sulle quali venivano registrati numeri sotto forma di molteplici intagli. I primi sistemi efficaci con i quali era possibile considerare in maniera funzionale anche grandi numeri risalgono ai Babilonesi.

È probabile che ancor più vecchio della notazione numerica sia il saper contare, quella capacità che si basa sull'esperienza dei ritmi del mondo e sulla sua registrazione linguistica. La nostra vita si struttura grazie a nume rosi processi che si ripetono regolarmente. Di essi fanno parte la regolare alternanza fra il giorno e la notte, il ritmo delle stagioni e, non ultimo, il breve susseguirsi dei passi mentre camminiamo o il battito del nostro cuore. Immagino che, una volta o l'altra, gli esseri umani abbiano cominciato a battere il ritmo del proprio passo cantando, parlando o tamburellando. Forse all'inizio borbottavano semplicemente fra sé e sé le loro parole per "destra" o "sinistra", o "un-due", forse cantavano, forse qualcuno tamburellava sull'incessante un-due… Non importa il modo in cui l'abbiano fatto: quello è stato l'inizio del contare. In ogni caso del contare in base due: un-due, un-due e così via. Una volta o l'altra qualcuno ebbe poi la folle idea di spezzare questo un-due in sé autosufficiente e destinato a ripetersi, e continuò semplicemente a contare: uno, due… tre. Probabilmente fu la volta dell'un-due-tre-quattro: un-due-tre-quattro, un-due-tre-quattro e così via. Ma una volta affrontato il primo ostacolo, è facile superare anche il secondo. Con il tre nacque l'infinita successione dei numeri: uno, due, tre e così via. In questo modo divenne chiaro che era sempre possibile fare un passo in avanti e che a un numero ne seguiva sempre un altro. Questo fu il vero inizio del contare. Chi è in grado di dire "tre" sa contare. La retta dei numeri reali, o meglio il segmento dei numeri reali, è l'immagine matematica che corrisponde a questo processo. Si tratta di una linea infinitamente lunga che ini zia con lo zero e sulla quale procediamo passo dopo passo così da poter raggiungere tutti i numeri: con un primo passo andiamo dallo zero all'uno, con il secondo al due, poi al tre e così via. I numeri che vengono in questo modo raggiunti, dunque i numeri 0, 1, 2 ecc., si chiamano *numeri naturali*.

Segmento dei numeri reali

La retta dei numeri reali, ovvero il segmento dei numeri reali ampliato con i numeri negativi, comprende i cosiddetti *numeri interi*. La retta dei numeri reali serve a chiarire e a illustrare i numerosi fenomeni numerici.



Retta dei numeri reali

Sulla retta dei numeri reali è possibile andare a piccoli o a grandi passi, si può saltellare avanti e in dietro, si può provare a colmare le lacune fra i numeri interi. L'idea della retta dei numeri reali andrebbe costantemente tenuta in considerazione.

Proprietà dei numeri

All'incirca intorno al 600 a.C. vi fu una svolta nella storia dello spirito europeo le cui conseguenze non possono essere ancora apprezzate come meriterebbero. A quel tempo, poche persone in Grecia e in Asia Minore hanno scoperto la potenza del pensiero. Per meglio dire, hanno scoperto la possibilità dell'astrazione, ovvero della semplificazione intellettuale orientata alla comprensione. Il vantaggio di questo processo, spesso faticoso, è che si possono indagare oggetti astratti e stati di cose servendosi del lavoro intellettuale, in particolare della logica. Se non si prende in considerazione il fossato scavato nella sabbia ma la linea astratta, se non si prendono in considerazione sette cani sgambettanti ma il numero 7, allora è possibile stabilire una relazione logica fra questi e altri oggetti e trarre conclusioni che hanno un grado di certezza irraggiungibile nel mondo empirico. Le persone che hanno dato vita in maniera decisiva a questo "primo Illuminismo" sono Talete di Mileto (624-546 a.C. ca.) e Pitagora (570-510 a.C. ca.). In particolare Pitagora, grazie alla sua scuola di Crotone nell'Italia meridionale, influenzò molto lo sviluppo successivo della matematica greca. I pitagorici consideravano i numeri non solo come grandezze quantitative, ma vi distinguevano anche diverse "qualità". Ad esempio, definivano i numeri pari nel modo seguente: un numero è pari se è divisibile per due senza lasciare resto. Un numero è invece dispari se nella di visione per due lascia un resto. Queste sono probabilmente le prime determinazioni concettuali (definizioni) della storia della matematica. I pitagorici conoscevano e formulavano anche leggi come, ad esempio, "dispari più dispari fa pari". Il che significa: la somma di due numeri dispari qualsiasi è sempre un numero pari. Ad esempio 3 + 5 fa 8, dunque un numero pari. Tuttavia l'aspetto decisivo è che ciò vale non soltanto per i numeri 3 e 5, ma *per tutti* i numeri dispari. I matematici chiamano una conclusione del genere "teorema". Il simbolismo e la mistica dei numeri erano elementi centrali nella dottrina pitagorica. I pitagorici attribuivano determinate proprietà non matematiche alle singole tipologie di numeri e ottenevano così un principio ordinatore per comprendere il mondo. Ad esempio, i numeri dispari era no "maschili", quelli pari "femminili". Allo stesso tempo i numeri pari rappresentavano l'infinito, mentre quelli dispari il finito e il limitato. Uno strumento decisivo per scoprire le proprietà dei numeri, per rappresentarli e per avere una comprensione intellettuale delle loro proprietà, erano i cosiddetti *numeri figurati*. L'idea fondamentale era quella di formare una figura geometrica con sassolini disposti in maniera regolare e di esaminarne la quantità. Ad esempio, era possibile rappresentare i numeri pari come fossero un rettangolo il cui lato era di due sassolini.

Numero pari

Analogamente, un numero dispari era rappresentato utilizzando un sasso in più.

Numero dispari

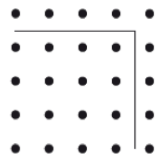
Del resto, da questa rappresentazione si "vede" subito che, aggiungendo o sottraendo 1 a un numero pari, si ottiene un numero dispari. Anche la suddetta regola "dispari più dispari fa pari" diviene immediatamente chiara: si "spingono" assieme due numeri dispari e si ottiene automaticamente un numero pari:

Dispari più dispari fa pari

Di particolare significato erano, e sono ancora, i numeri quadrati: sono numeri che si possono disporre in un quadrato.

I primi numeri quadrati

I primi quadrati sono 1, 4, 9, 16 ecc. La rappresentazione in numero figurato rende anche evidente il modo in cui da un quadrato si passa al successivo. È chiaro che si deve addizionare un numero dispari a un quadrato per ottenere il quadrato successivo. Ad esempio $4^2 + 9 = 16 + 9 = 25 = 5^2$. In effetti, le differenze fra quadrati l'un l'altro successivi sono uguali a 3, 5, 7, 9 ecc. In generale vale: il quadrato n^0 si ottiene se aggiungiamo al quadrato precedente
il numero dispari n^0. Espresso in modo differente: la somma dei primi numeri dispari è un numero quadrato; ad esempio $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

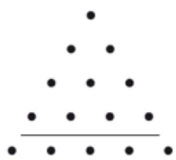


Quadrati e numeri dispari

Altrettanto interessanti dei quadrati, e in un certo senso ancora più semplici, sono i numeri triangolari, dunque le quantità di sassolini necessari per ottenere un triangolo equilatero.

Numeri triangolari

La successione dei numeri triangolari inizia nel modo seguente: 1, 3, 6, 10, 15 ecc.
Il numero triangolare n^0 si ottiene dal precedente numero triangolare accresciuto di *n*. In altre parole: la somma dei primi numeri naturali *n* è un numero triangolare. Ad esempio vale $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.



Numeri triangolari in successione

Di significato ben diverso era per i pitagorici la *tetraktys*, il quarto numero triangolare:

Tetraktys

In essa convergono tre importanti numeri. La forma triangolare, la somma dei primi quattro numeri $1 + 2 + 3 + 4$ e il suo risultato, il 10. Essa era qualcosa di perfetto poiché «contiene dentro di sé ogni sua [del numero] natura» (cfr. il frammento 5 di Archita trasmesso da Teone di Smirne, in Diels, Kranz, 2006, p. 891). Si può liquidare questo modo di vedere le cose come un infantile "poggiare sassolini", non rendendo però giustizia al significato di questo metodo. In realtà questi "segni senza parola" sono i pri mi ed efficaci tentativi di evidenziare strutture nel regno dei numeri. Anche per questo vanno tenuti in grandissimo conto, poiché a quel tempo i Greci non avevano ancora a disposizione alcun formali smo per esprimere gli stati di cose presi in esame.

Albrecht Beutelspacher
Tratto da
Il fascino dei numeri. Storie e segreti, Carocci editore